ФИ ____________________

Класс____________ Дата____________

Рабочий лист по алгебре по теме «Первообразная и интеграл»

Задание №1. Повторим!

Заполните таблицу производных:

$C' =$

$x' =$

$(x^n)' =$

$\left(\frac{1}{x}\right)' =$

$(\sqrt{x})' =$

$(a^x)' =$

$(e^x)' =$

$(\log_a x)' =$

$(\ln x)' =$

$(\sin x)' =$

$(\cos x)' =$

$(tgx)' =$

$(ctgx)' =$

ПОСТАВЬТЕ В СООТВЕТСТВИЕ ФУНКЦИЮ И ЕЁ ПРОИЗВОДНУЮ:

$f'(x) = -\frac{3}{x^2}$; $f'(x) = 14x^6$; $f(x) = \ln x$; $f(x) = 2x^7$; $f'(x) = -2$; $f(x) = 2x^4 + 7x - 1$; $f'(x) = 2$; $f(x) = 3^x$; $f'(x) = \frac{3}{2\sqrt{3x-7}}$; $f(x) = 9 - 2x$; $f(x) = \frac{3}{x}$; $f(x) = -\sqrt{x}$; $f'(x) = 3^x \ln 3$; $f(x) = \cos x$; $f(x) = -7$; $f'(x) = 8x^3 + 7$; $f'(x) = -\sin x$; $f(x) = \sqrt{3x-7}$; $f(x) = x \cdot \sin x$; $f'(x) = -\frac{1}{2\sqrt{x}}$; $f(x) = 2x$; $f'(x) = \frac{1}{x}$; $f(x) = \frac{2x}{e^x}$; $f'(x) = 0$; $f'(x) = \sin x + x\cos x$; $f'(x) = \frac{2-2x}{e^x}$

Задание №2. Вставьте пропуски в таблицу первообразных и в определение первообразной функции $F(x)$ для функции $f(x)$:

Заполните таблицу формул для нахождения первообразных:	
$f(x)$	$F(x)$
0	
1	
x	
$x^r \ (r \neq -1)$	
$\frac{1}{x}$	
$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	
$\sin x$	
$\cos x$	
$\frac{1}{\sin^2 x}$	
$\frac{1}{\cos^2 x}$	
e^x	
a^x	

Функцию $y = F(x)$ называют **первообразной для** функции $y = f(x)$ на промежутке X, если для $x \in X$ выполняется **равенство** ____________________.

Если $y = F(x)$ - **первообразная** для функции $y = f(x)$ на промежутке X, [illegible] $\in X$, то [illegible] функции $y = f(x)$ **бесконе[illegible] много первообразных и все они [illegible]т** вид____________________

Первообразная **Функция** **Производная**

$F(x) = \frac{x^4}{4} \leftarrow \boxed{f(x) = x^3} \rightarrow f'(x) = 3x^2$

ФИ ____________________

Задание №3. Из списка функций выберите функцию $f(x)$, для которой первообразной $F(x)$ будет:

$А) F(x) = x^8 - x^6$ $Б) F(x) = -3\cos x$ $В) F(x) = 4x^7$

$Г) F(x) = \ln(2x-1)$ $Д) F(x) = 6\sin x$ $Е) F(x) = \sqrt{x} + \frac{5}{x}$

1) $f(x) = \frac{x^9}{9} - \frac{x^7}{7}$ 2) $f(x) = 3\sin x$ 3) $f(x) = -6\cos x$ 4) $f(x) = 28x^6$ 5) $f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{5}{x^2}$ 6) $f(x) = \frac{2}{2x-1}$

7) $f(x) = \frac{x^8}{2}$ 8) $f(x) = -\frac{1}{2\sqrt{x}} + 5$ 9) $f(x) = -3\sin x$ 10) $f(x) = 6\cos x$ 11) $f(x) = \frac{1}{2x-1}$ 12) $f(x) = 8x^7 - 6x^5$

А	Б	В	Г	Д	Е

Задание №4. Для функции найдите одну из первообразных:

а) Для **функции** $y = x^2$ **первообразной** является **функция** $y = \frac{x^3}{3} + C \left(y = \frac{x^{2+1}}{2+1} + C\right)$, та[illegible]ак

для любого x справедливо равенство: $\left(\frac{x^3}{3} + C\right)' = \frac{1}{3} \cdot 3x^2 = x^2$.

Использовали **формулу**: для $f(x) = x^r$ первообразной [illegible] функц[illegible] $+C$.

Другие первообразные для функции $y = x^2$: [illegible]

б) Для **функции** $y = x^3$ **первообразной явля[illegible] фун[illegible]ия**____________________, так как

для любого x справед[illegible]о равен[illegible]: = $= x^3$.

в) Для **ф[illegible]ии** $y =$ [illegible] **первообра[illegible]ой** является **функция**

г) [illegible] **первообразной** является **функция**

Историческая справка

Термин «**производная**» является буквальным переводом на русский язык французского слова derivee, которое ввел в 1797 г. **Жозеф Луи Лагранж**, французский математик, астроном и механик.

Сам термин «**производная**» впервые встречается у французского математика **Луи-Франсуа-Антуана Арбогаста** в его книге «**Вычисление производных**», опубликованной в Париже в 1800 г. Этим термином сразу же стал пользоваться и Лагранж.

Термин этот быстро вошёл в общий обиход, а французский математик **Огюстен Луи Коши**, используя начальную букву этого термина, стал обозначать производную символом Dy или $Df(x)$.

Жозеф Луи Лагранж
(25 января 1736 г. - 10 апреля 1813 г.)
французский математик, астроном и механик

ФИ ____________________

Задание №4. Заполни пропуски в правила нахождения первообразных:

ПРАВИЛО 1. Первообразная **суммы** равна ____________________ первообразных.

Пример: $f(x) = x^3 - \cos x$ $F(x) = \frac{x^4}{4} - \sin x + C$.

ПРАВИЛО 2. Если [illegible] - [illegible]рвообразная для $f(x)$, то ____________ - первообразная для $kf(x)$.

Пример: [illegible] $F(x) = \frac{2x^4}{4} - \frac{1}{7}\sin x + C$ $F(x) = \frac{x^4}{2} - \frac{1}{7}\sin x + C$.

[illegible] - первообразная для функции $f(x)$, то первообразной для [illegible] жит функция____________________.

При[illegible] $f(x) = (2-3x)^3$ $F(x) = \frac{1}{-3} \cdot \frac{(2-3x)^4}{4} + C$ $F(x) = -\frac{(2-3x)^4}{12} + C$.

Задание №5. Для функции $f(x)$ найдите хотя бы одну первообразную:

а) $f(x) = x^2 + x^{14}$

б) $f(x) = \frac{4}{\sqrt{x}} + \frac{3}{x^2}$

в) $f(x) = 8 - 2x^3$

г) $f(x) = e^x + \cos x$

д) $f(x) = -\frac{1}{3}\sin x + \frac{2}{\cos^2 x}$

е) $f(x) = \cos\left(4x + \frac{\pi}{4}\right)$

ж) $f(x) = \frac{1}{2\sqrt{1-9x}}$

з) $f(x) = e^{3x-2} - \sin(5x)$

Задание №6. Для функции $f(x) = 8 - 2x^3$ найдите ту первообразную, график которой проходит через заданную точку М(0;2):

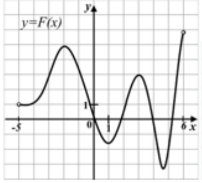
ФИ ____

Задание №7. Для функции $f(x)=\sin x$ найдите ту первообразную, график которой проходит через заданную точку $M\left(\frac{\pi}{3};\frac{3}{8}\right)$:

Задание №8. Точка движется по координатной прямой, её скорость задана формулой $v=5+4t$ (закон изменения скорости), где t – время движения точки. Найдите закон движения $s=s(t)$, если известно, что в момент времени $t=3$ координата точки равнялась 6.

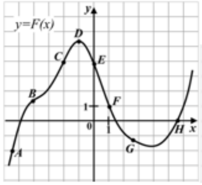
Задания из ЕГЭ:

Задание №9. На рисунке изображён график *y=F(x)* одной из первообразных некоторой функции *f(x)*, определённой на интервале (− 5; 6). Пользуясь рисунком, определите количество решений уравнения *f(x)=0* на отрезке [− 4; 5].



Ответ:

Задание №10. На рисунке изображён график *y=F(x)* одной из первообразных не[illegible]орой ф[illegible]ции *f(x)* отмечены восемь точек на оси абсцисс: A, B, C, D, E, F, G, H. В скольких из этих [illegible]чек фун[illegible] *f(x)* положительна?

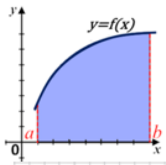


Ответ:

ФИ ____

Определённый интеграл

ЗАДАЧА: вычисление площади криволинейной трапеции.

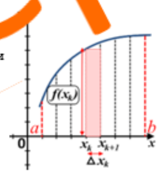


Определение. Криволинейная трапеция – фигура, ограниченная осью x, прямыми $x=a, x=b$ $(a<b)$ и графиком непрерывной и неотрицательной на отрезке $[a;b]$ функции $y=f(x)$.

1) **Формула** для нахождения **площади трапеции** не подходит. Если дочертить криволинейную трапецию до привычного для нас четырехугольника, то мы получим большую погрешность в площади. Поэтому необходимо использовать **способ для приближенного** и наиболее **точного** нахождения площади данной криволинейной трапеции.

2) Разобьем отрезок $[a;b]$ (основание криволинейной трапеции) на [illegible] частей с помощью точек $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_k, x_{k+1}, \ldots, x_{n+1}$ и проведем через [illegible]и точки прямые, **параллельные** оси y. Площадь всей криволи[illegible] тра[illegible] будет равна сумме площадей n образовавшихся у[illegible] с[illegible]биков.

3) Рассмотрим отдельно $k-$*ый* столбик, т.е. крив[illegible]нейную [illegible]рапеци[illegible] основанием $\Delta x_k = x_{k+1}-x_k$. Заменим его **прямоуго[illegible]** [illegible]ке основанием $\Delta x_k = x_{k+1}-x_k$ и высотой $f(x_k)$. Прибли[illegible]нное зна[illegible]ие площади $k-$*го* столбика равно п[illegible]лучен[illegible] прямоуго[illegible] $(x_k)\cdot\Delta x_k$.



4) Если выполнить п[illegible] **(3)** с кажд[illegible] столбиком, то **площадь всей криволинейной тр[illegible]ции** прибли[illegible]нно будет равна:

$$\boxed{S_n = f(\ldots)\ldots + f(\ldots)\Delta x_1 + f(x_2)\ldots + \ldots + f(x_k)\Delta x_k + \ldots + f(x_{n-1})\Delta x_{n-1}}$$

$(a = x_0,$ [illegible] x_n [illegible] $x_0 = \Delta$ [illegible] $x_2 = \ldots$ [illegible]$_{n-1}$ (*длины отрезков* $[x_0;x_1],\ [x_1;x_2], \ldots$).)

[illegible] больш[illegible] сто[illegible]ков (n), [illegible] точнее значение площади криволинейной трапеции!

5) [illegible]ма[illegible] **площа[illegible] S криволинейной трапеции** равна **пределу последовательности** (S_n):

$$\boxed{S = \lim_{n\to\infty} S_n}$$

К[illegible]ой же **математической модели** сводятся задачи **на вычисление массы стержня и на перемещение точки**.

Определение. Определённым интегралом от функции $y=f(x)$ по отрезку $[a;b]$ называют предел $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ и обозначают $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ (интеграл от а до бэ эф от икс дэ икс). $a-$ нижний предел интегрирования, $b-$ верхний предел интегрирования.

Т. о. $S_{\text{криволинейной трапеции}} = \int\limits_a^b f(x)\,dx$.

Формула Ньютона-Лейбница для вычисления значения определенного интеграла

Теорема. Если функция $y=f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$, то справедлива формула

$\boxed{\int\limits_a^b f(x)\,dx = F(b)-F(a)}$, где – $F(x)$ первообразная для $f(x)$.

Другая форма записи (**двойная подстановка**): $\boxed{\int\limits_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b)-F(a)}$.

ФИ ____

$$\boxed{\int\limits_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b)-F(a)}$$

Задание №11.Выч[illegible]те о[illegible]делённый интеграл:

а) $\int\limits_{-2}^{4} x^2 dx$

[illegible] **фу[illegible]** [illegible]$=x^2$ **пе[illegible]образной** является **функция** $y=\frac{x^3}{3}$ $\left(y=\frac{x^{2+1}}{2+1}\right)$.

Зна[illegible] [illegible] $x^2 dx = $ [illegible]$\frac{}{3}\Big|_{-2}^{4} = \frac{4^3}{3}-\frac{(-2)^3}{3}=\frac{64+8}{3}=24$

[illegible] $\int\limits_{-1}^{2} x^3 dx$

Для **функции** $y=x^3$ **первообразной** является **функция** $y=$ ___.

Значит, $\int\limits_{-1}^{2} x^3 dx = $ ___ $\Big|_{-1}^{2}$ = ___ − ___ =

в) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos x\, dx$

Для **функции** $y=\cos x$ **первообразной** является **функция** $y=$.

Значит, $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos x\, dx = \quad \Big| \quad =$

г) $\int\limits_{-2}^{0} e^x dx$

Вставьте пропуски в свойства определенного интеграла:

Свойство 1. Интеграл от суммы функций равен ______________________ интегралов:

$\int\limits_a^b (f(x)+g(x))\,dx = \int\limits_a^b \quad dx + \int\limits_a^b \quad dx$.

Свойство 2. Постоянный множитель можно вынести за знак интеграла:

$\int\limits_a^b k f(x)\,dx = \quad \int\limits_a^b \quad dx$.

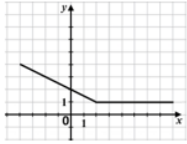
Задание №12.Вычислите определённый интеграл:

а) $\int\limits_1^3 \frac{3}{x^2}dx =$

ФИ ____

б) $\int_{-2}^{-1} \sqrt{3x+7}\, dx =$

Задание №13. График функции $y = f(x)$ изображён на рисунке. Вычислите $\int_{-2}^{5} f(x)\, dx$:



Задание №14. Вычислите **площадь фигуры**, ограниченной линиями:

а) $y = 3 + x^3, y = 0, x = 2, x = -1$

б) $y = \sin x, y = 0, x = 0, x = \frac{\pi}{2}$

в) $y = 3\sqrt{x}, y = 0, x = 1, x = 4$

г) $y = 5x - x^2, y = 0$

Историческая справка

Готфрид Вильгельм Лейбниц (1646-1716 гг.) Немецкий философ, математик, логик, физик, механик, историк, изобретатель, дипломат и языковед

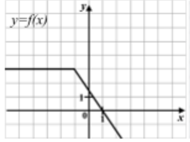
Исаак Ньютон (1643-1727 гг.) английский физик, математик, механик и астроном

Формула Ньютона — Лейбница — одна из основных формул математического анализа, если точнее, одного из его разделов — анализа бесконечно малых чисел. Теорема носит имена двух выдающихся ученых 17 века — Исаака Ньютона и Готфрида Лейбница, каждый из которых оставил значительный след в истории развития физики и математики, механики и астрономии. Теорией бесконечно малых чисел оба ученых занимались примерно в одни годы, работая независимо друг от друга. Считается, что первым разработал системную теорию дифференциального и интегрального исчисления Ньютон. Его вариант теории был готов уже в 1670—1680 годах, но по каким-то причинам не публиковался, хотя ученый делился им в переписке со многими коллегами, в том числе с Лейбницем. Теория Лейбница стала широко известна в научных кругах с 1676 года, в 1684 году вышел посвященный дифференциальному исчислению труд ученого «Новый метод максимумов и минимумов». Что касается Ньютона, то его теория в первом изложении вышла лишь в 1693 году, полностью была опубликована в 1704 г. в работе «О квадратуре кривых».

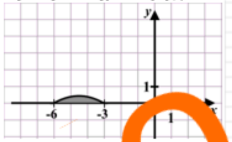
ФИ ____

Задания из ЕГЭ

Задание №15. На рисунке изображён график некоторой функции *y=f(x)* (два луча с общей начальной точкой). Пользуясь рисунком, вычислите *F(1)−F(− 3)*, где *F(x)* – одна из первообразных функции *f(x)*.



Задание №16. Дан график функции *y=f(x)*. Функция $F(x) = -\frac{1}{18}x^3 - \frac{3}{[illegible]} \ldots \frac{4}{[illegible]}$ явля[illegible] одной из первообразных функции *y=f(x)*. Найдите площадь закрашенной фи[illegible]ры.



Выч[illegible] площа[illegible] плоской фи[illegible]уры с помощью определенного интеграла: площадь S фигуры, огранич[illegible] пр[illegible]ямы[illegible] $= a, x$ [illegible] и графиками функций $y = f(x)$ и $y = g(x)$, непрерывных на [illegible]езке [illegible]$b]$ и [illegible]их, что для любого x из отрезка $[a;b]$ выполняется неравенство $g(x) \le f(x)$, вы[illegible]я по ф[illegible]уле:

$$S = \int_a^b \left(f(x) - g(x)\right) dx$$

Задание №17. Вычислите площадь фигуры, ограниченной прямой $y = 2 - x$ и параболой $y = 3 - x - x^2$.

При решении каких номеров вы испытали затруднения?

Количество баллов: Оценка:

Ответы

Задание №1. Повтор[illegible]

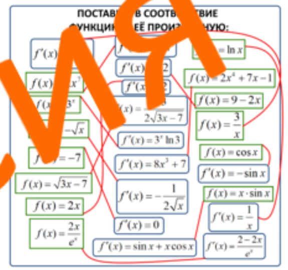


ТАБЛИЦА ПРОИЗВОДНЫХ

$C' = 0$	$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$
$x' = 1$	$(\ln x)' = \frac{1}{x}$
$(x^n)' = nx^{n-1}$	$(\sin x)' = \cos x$
$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$	$(\cos x)' = -\sin x$
$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$(tgx)' = \frac{1}{\cos^2 x}$
$(a^x)' = a^x \cdot \ln a$	$(ctgx)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$
$(e^x)' = e^x$	

Задание №2. Вставьте пропуски в таблицу первообразных и в определение первообразной функции $F(x)$ для функции $f(x)$:

Заполните таблицу формул для нахождения первообразных:	
$f(x)$	$F(x)$
0	C
1	$x + C$
x	$\frac{x^2}{2} + C$
$x^r\ (r \ne -1)$	$\frac{x^{r+1}}{r+1} + C$
$\frac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert + C$
$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\sqrt{x} + C$
$\sin x$	$-\cos x + C$
$\cos x$	$\sin x + C$
$\frac{1}{\sin^2 x}$	$-ctgx + C$
$\frac{1}{\cos^2 x}$	$-tgx + C$
e^x	$e^x + C$
a^x	$\frac{a^x}{\ln a} + C$

Функцию $y = F(x)$ называют **первообразной для** функции $y = f(x)$ на промежутке X, если для $x \in X$ выполняется равенство $F'(x) = f(x)$.

Если $y = F(x)$ - **первообразная для функции** $y = f(x)$ на промежутке X, если для $x \in X$, то у функции $y = f(x)$ **бесконечно много первообразных** и все они имеют **вид** $y = F(x) + C$.

Задание №3.

А	Б	В	Г	Д	Е
12	2	4	6	10	5

ответы+решения