

ФИ \_\_\_\_\_  
Класс \_\_\_\_\_ Дата \_\_\_\_\_

### Рабочий лист по геометрии по теме «Векторы»

№1. Выберите из списка векторные величины (подчеркните): сила, скорость, длина отрезка, ускорение, масса, перемещение материальной точки.

№2. Вставьте пропуски:

Отрезок, для которого указано, какой из его точек считается \_\_\_\_\_, а какая — \_\_\_\_\_, называется \_\_\_\_\_ или вектором.  
— вектор, у которого начало совпадает с концом.  
— некулевые векторы, которые лежат на одной прямой или на параллельных прямых.  
— это коллинеарные векторы, которые направлены одинаково.  
— это коллинеарные векторы, которые противоположно направлены.  
— это сопараллельные векторы, длины которых равны.  
— это противоположно направленные векторы, длины которых равны.  
ненулевого вектора  $\overrightarrow{AB}$  называется длина отрезка  $AB$ .  
вектор сопараллелен с любым вектором.

Задание №3. Ознакомьтесь с рисунком и заполните таблицу:

Начало вектора $\vec{AB}$ :	
Конец вектора $\vec{AB}$ :	
Нулевой вектор:	
Модуль вектора $\vec{a}$ :	
Коллинеарные векторы:	
Сопараллельные векторы:	
Противоположно направленные векторы:	
Равные векторы:	
Противоположные векторы:	
Координаты точек $G$ и $H$ :	

№4. Вставьте пропуски:

Каждая координата вектора разности соответствующих координат конца и начала вектора:  $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2) \Rightarrow AB = \{x_2 - x_1; y_2 - y_1\}$ .

Найдите координаты векторов  $\vec{h}, \vec{EF}, \vec{CD}, \vec{g}, \vec{n}, \vec{KL}$ , используя рисунок из №5.

1

ФИ \_\_\_\_\_  
№5. Вставьте пропуски:

Каждая координата вектора равна разности соответствующих координат его конца и начала:

$$A(x_1; y_1), B(x_2; y_2) \Rightarrow AB = \{x_2 - x_1; y_2 - y_1\}.$$

1. Каждая координата суммы двух или более векторов равна \_\_\_\_\_ соответствующих координат этих векторов.

$$a(x_1; y_1), b(x_2; y_2) \Rightarrow a + b = \{x_1 + x_2; y_1 + y_2\}$$

2. Каждая координата разности двух векторов равна \_\_\_\_\_ соответствующих координат этих векторов.

$$a(x_1; y_1), b(x_2; y_2) \Rightarrow a - b = \{x_1 - x_2; y_1 - y_2\}$$

3. Каждая координата произведения вектора на число равна \_\_\_\_\_ соответствующей координаты вектора на это число.

$$a(x_1; y_1) = ka = \{kx_1; ky_1\}$$

Найдите координаты векторов, используя рисунок:

$$\text{a}) \vec{h} + \vec{EF}$$

$$\text{б}) \vec{KL} - \vec{CD}$$

$$\text{в}) \vec{h} + \vec{EF} + \vec{CD}$$

$$\text{г}) 3 \cdot \vec{GH}$$

$$\text{д}) \vec{h} - \vec{EF}$$

$$\text{е}) -4 \vec{CD} - \vec{g}$$

5. Сделайте выводы:

1. Каждая координата середины отрезка равна \_\_\_\_\_ соответствующих координат его концов:

$$A(x_1; y_1), B(x_2; y_2), M - \text{середина отрезка } AB \Rightarrow M = \left\{ \frac{x_1 + x_2}{2}; \frac{y_1 + y_2}{2} \right\}.$$

2. Длина вектора по его координатам вычисляется по формуле:

$$a(x_1; y_1) = |a| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$$

3. Расстояние  $d$  между двумя точками  $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2)$  вычисляется по формуле:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Найдите длины векторов  $\vec{h}, \vec{EF}, \vec{MM}, \vec{p}, \vec{m}, \vec{h} + 2\vec{EF}$ , используя рисунок из №5:

$$\text{а}) |\vec{h}| =$$

$$\text{б}) |\vec{p}| =$$

$$\text{в}) |\vec{m}| =$$

$$\text{г}) |\vec{h} + 2\vec{EF}| =$$

$$|\vec{MM}| =$$

2

ФИ \_\_\_\_\_  
№6. Вставьте пропуски:

Скалярным произведением двух векторов называется произведение их \_\_\_\_\_ на \_\_\_\_\_, при этом произведение ненулевых векторов равно нулю тогда и только тогда, когда эти векторы \_\_\_\_\_.

Если угол между векторами  $a$  и  $b$  равен  $90^\circ$ , то скалярное произведение положительно, если же угол между векторами  $a$  и  $b$  равен  $90^\circ$ , то скалярное произведение отрицательно.

Таким образом в прямоугольной системе координат скалярное произведение векторов  $a(x_1; y_1)$  и  $b(x_2; y_2)$  выражается формулой

$$\cos \alpha = \frac{ax + by}{|a||b|}$$

$$\cos \alpha = \frac{ax + by}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2} \sqrt{x_2^2 + y_2^2}}$$

Синус угла между ненулевыми векторами  $a(x_1; y_1)$  и  $b(x_2; y_2)$  выражается формулой

$$\sin \alpha = \frac{|ab|}{|a||b|}$$

$$\sin \alpha = \frac{\sqrt{x_1^2 + y_1^2} \sqrt{x_2^2 + y_2^2} - ab}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2} \sqrt{x_2^2 + y_2^2}}$$

Найдите скалярное произведение векторов, используя рисунок:

$$\text{а}) \vec{h} \cdot \vec{EF} =$$

$$\text{б}) \vec{a} \cdot \vec{m} =$$

$$\text{в}) \vec{h} \cdot 2\vec{EF} =$$

$$\text{г}) -4\vec{CD} \cdot \vec{g} =$$

$$\text{д}) \vec{KL} \cdot \vec{a} =$$

ФИ \_\_\_\_\_

№7. Вставьте пропуски:

Скалярное произведение ненулевых векторов равно нулю тогда и только тогда, когда эти векторы \_\_\_\_\_.

Если угол между векторами  $a$  и  $b$  равен  $90^\circ$ , то скалярное произведение положительно, если же угол между векторами  $a$  и  $b$  равен  $90^\circ$ , то скалярное произведение отрицательно.

Таким образом в прямоугольной системе координат скалярное произведение векторов  $a(x_1; y_1)$  и  $b(x_2; y_2)$  выражается формулой

$$\cos \alpha = \frac{ax + by}{|a||b|}$$

$$\cos \alpha = \frac{\sqrt{x_1^2 + y_1^2} \sqrt{x_2^2 + y_2^2} - ab}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2} \sqrt{x_2^2 + y_2^2}}$$

Синус угла между ненулевыми векторами  $a(x_1; y_1)$  и  $b(x_2; y_2)$  выражается формулой

$$\sin \alpha = \frac{|ab|}{|a||b|}$$

$$\sin \alpha = \frac{\sqrt{x_1^2 + y_1^2} \sqrt{x_2^2 + y_2^2} - ab}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2} \sqrt{x_2^2 + y_2^2}}$$

Найдите скалярное произведение векторов, используя рисунок:

$$\text{а}) \vec{h} \cdot \vec{EF} =$$

$$\text{б}) \vec{a} \cdot \vec{m} =$$

$$\text{в}) \vec{h} \cdot 2\vec{EF} =$$

$$\text{г}) -4\vec{CD} \cdot \vec{g} =$$

$$\text{д}) \vec{KL} \cdot \vec{a} =$$

Сделайте выводы об углах между векторами в каждом случае: тупой, острый, прямой.

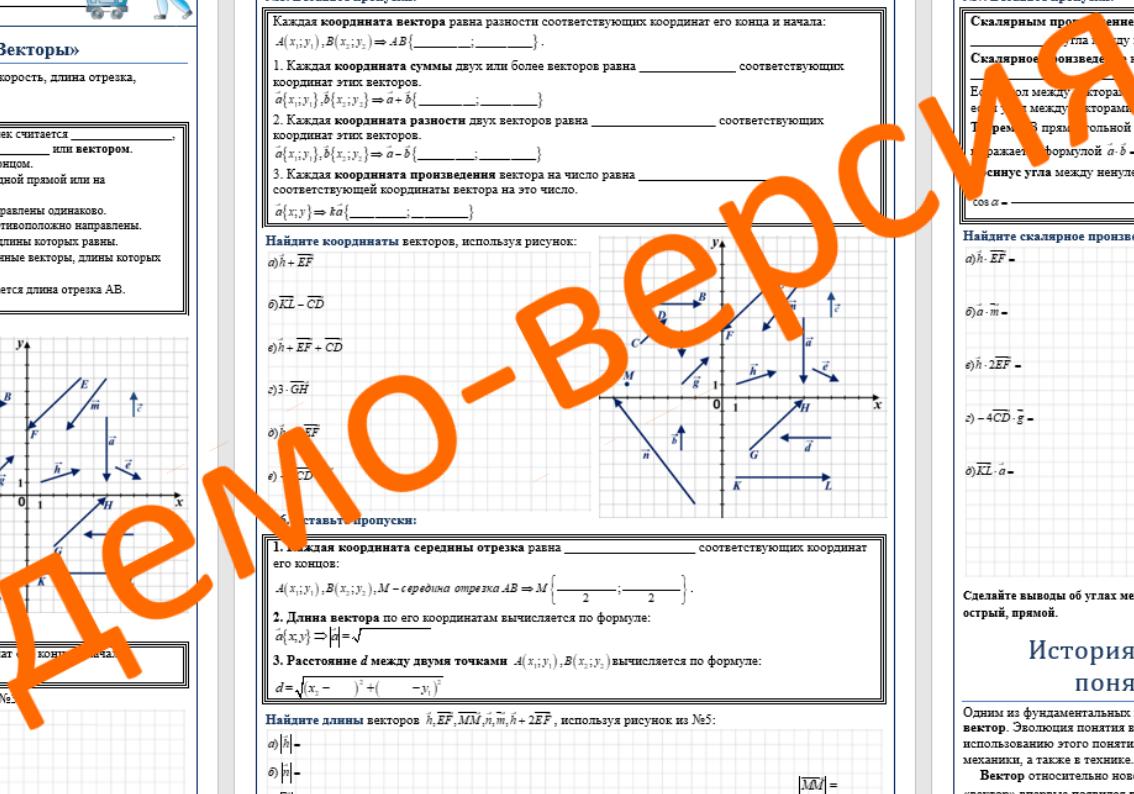
### История возникновения понятия вектора

Одним из фундаментальных понятий современной математики является вектор. Эволюция понятия вектора осуществлялась благодаря широкому использованию этого понятия в различных областях математики, механики, а также в технике.

Вектор относительно новое математическое понятие. Сам термин «вектор» впервые появился в 1846 году у ирландского математика и астронома Уильяма Гамильтона (1805 – 1865) в работах по построению числовых систем, обобщающих комплексные числа. Гамильтону принадлежат и термин «скаляр», «скалярное произведение», «векторное произведение».



Уильям Роун Гамильтон  
(4 августа 1805 — 2 сентября 1865)  
— ирландский математик,  
астроном и физик,  
физик-теоретик, «один из лучших  
математиков XIX века».



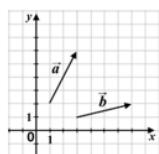
1

2

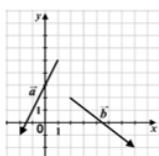
ФИ

Для любых векторов  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$  и любого числа  $k$  справедливы соотношения:  
 $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$   
 $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$   
 $(k\vec{a}) \cdot \vec{b} = k(\vec{a} \cdot \vec{b})$

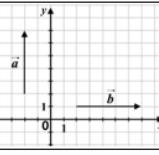
№8. На координатной плоскости изображены векторы  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ .



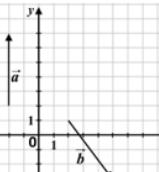
- а) Найдите скалярное произведение  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ .  
 б) Найдите скалярное произведение  $\vec{a}$  и  $2\vec{b}$ .



- в) Найдите скалярное произведение  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ .  
 г) Найдите скалярное произведение  $3\vec{a}$  и  $\vec{b}$ .



- д) Найдите скалярное произведение  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ .  
 е) Найдите скалярное произведение  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ .



- ж) Найдите скалярное произведение  $2\vec{a}$  и  $-3\vec{b}$ .

ФИ

№9. Данны два вектора  $\vec{a}\{-2;3\}$  и  $\vec{b}\{3;y_a\}$ . Найдите  $y_a$ , если  $|\vec{b}|=1,5|\vec{a}|$ . Если таких значений несколько, в ответ запишите большее из них.

№10. Даны два вектора  $\vec{a}\{x_a;-8\}$  и  $\vec{b}\{-4;1\}$ . Найдите  $x_a$ , если  $|\vec{a}|=2,5|\vec{b}|$ . Если таких значений несколько, в ответ запишите меньшее из них.

№11. Даны три вектора  $\vec{a}\{-2;5\}$ ,  $\vec{b}\{6;1\}$  и  $\vec{c}\{3;y_c\}$ . Найдите  $y_c$ , если  $(\vec{a}+\vec{b}) \cdot \vec{c}=0$ .

№12. Даны три вектора  $\vec{a}\{7;-2\}$ ,  $\vec{b}\{4;1\}$  и  $\vec{c}\{-3;y_c\}$ . Найдите  $y_c$ , если  $(\vec{a}-\vec{b}) \cdot \vec{c}=0$ .

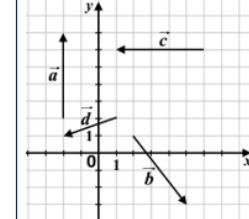
№13. Даны векторы  $\vec{a}\{-2;4\}$ ,  $\vec{b}\{2;-1\}$  и  $\vec{c}\{x_c+y_c\}$ . Найдите  $x_c+y_c$ , если известно, что векторы  $\vec{c} \parallel \vec{b}$  и  $|\vec{c}|=|\vec{b}|$ .

ФИ

№14. Косинус угла между векторами  $\vec{a}\{4;y_a\}$  и  $\vec{b}\{x_b;0\}$  равен  $\frac{2}{\sqrt{5}}$ . Найдите  $y_a$ . Если таких значений несколько, в ответ запишите меньшее из них.

№15. На координатной плоскости изображены векторы  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$  и  $\vec{d}$ .

- а) Найдите длину вектора  $2\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}$ .  
 б) Найдите скалярное произведение  $\vec{a} \cdot (\vec{b}+\vec{c})$ .  
 в) Найдите косинус угла между векторами  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ .  
 г) Найдите косинус угла между векторами  $\vec{a}+\vec{b}$  и  $\vec{d}$ .



ФИ \_\_\_\_\_

№16. Вставьте пропуски:

Скалярное произведение  $\vec{a}$  называется \_\_\_\_\_ вектора  $\vec{a}$  и обозначается  $\vec{a}^2$ .  
Скалярный квадрат вектора равен \_\_\_\_\_  $\vec{a} \cdot \vec{a} = \underline{\hspace{2cm}}$ .

Даны векторы  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ . При этом  $|\vec{a}|=4$  и  $|\vec{b}|=6$ , а угол между векторами равен  $60^\circ$ . Найдите длину вектора  $4\vec{a} - \vec{b}$ .

№17. Даны векторы  $\vec{a}\{-4; 2\}$  и  $\vec{b}\{8; x\}$ . Найдите  $x$ , если известно, что угол между векторами  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  равен  $90^\circ$ .

Количество баллов:

Оценка:

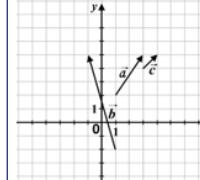
7

ФИ \_\_\_\_\_

## Самостоятельная работа

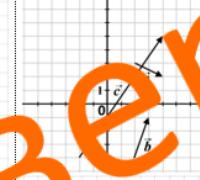
### ВАРИАНТ 1

- а) Найдите длину вектора  $2\vec{a} - \vec{b} - 3\vec{c}$ .  
 б) Найдите косинус угла между векторами  $\vec{a}$  и  $\vec{c}$ .  
 в) Найти скалярное произведение векторов  $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$  и  $\vec{a} - 2\vec{b}$ .



### ВАРИАНТ 2

- а) Найдите длину вектора  $2\vec{a} + 2\vec{b} - \vec{c}$ .  
 б) Найдите косинус угла между векторами  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ .  
 в) Найти скалярное произведение векторов  $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$  и  $2\vec{a} - \vec{b}$ .



Количество баллов:  Оценка:

Количество баллов:  Оценка:

8

## ОТВЕТЫ

№1. Выберите из списка векторные величины (подчеркните): **сила, скорость, длина отрезка, ускорение, масса, положение материальной точки**.

№2. Вставьте пропуски:  
Отрезок, концы которого указаны, какая из его **границочных точек** считается **началом**, а какая — **концом**, называется **направленным отрезком** или **вектором**.

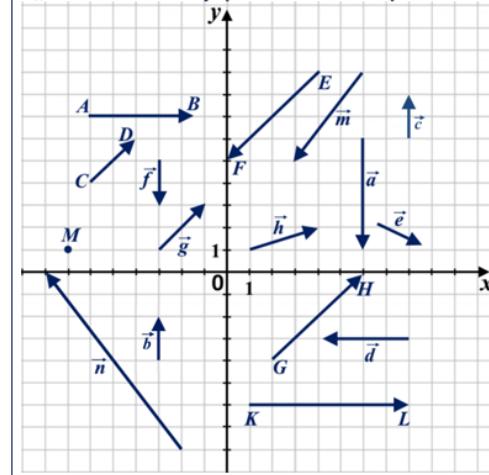
**Нулевой вектор** — вектор, у которого начало совпадает с концом.

**Сонаправленные векторы** — это коллинеарные векторы, которые направлены одинаково.  
**Противоположно направленный векторы** — это коллинеарные векторы, которые противоположно направлены.

**Равные векторы** — это сонаправленные векторы, длины которых равны.  
**Противоположные векторы** — это противоположно направленные векторы, длины которых равны.

**Модулем** некулового вектора  $\vec{AB}$  называется длина отрезка  $AB$ .  
**Нулевой вектор** сонаправлен с любым вектором.

Задание №3. Ознакомьтесь с рисунком и заполните таблицу:



9

Ответы